ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ–ΙΟΥΝΙΟΥ 2011

ΤΑΞΗ Α

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Θέμα 1ο

Α. Α₁. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β,να αποδείξετε ότι: $|\alpha.\beta| = |\alpha|.|\beta|$. **Μον.5**

Α₂. Να συμπληρώσετε τις σχέσεις: **i.** $\beta \neq 0, \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = -$ **ii.** $|\alpha + \beta| \leq ---$ **Μον.2Χ2=4**

Β. Β₁. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Β₂. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A είναι άρτια; **Μον.3Χ2=6**

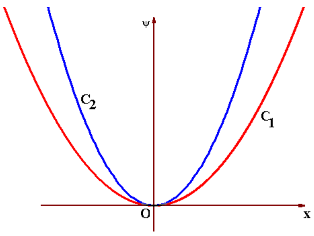
Γ. Να χαρακτηρίσετε στο γραπτό σας με Σωστό ή Λάθος κάθε ένα από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Αν $\rho \neq 0$,τότε: $|\chi| > |\rho| \Leftrightarrow \chi < -|\rho|$ ή $\chi > |\rho|$.

β. Αν $\alpha > 0$,μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος,τότε: $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$.

γ. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει: $\sqrt[4]{\alpha^2} = \sqrt{\alpha}$.

δ. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(\chi) = \chi^2, \chi \in R$ και $g(\chi) = 2\chi^2, \chi \in R$.



Η C_1 είναι η γραφική παράσταση της g και η C_2 είναι η γραφική παράσταση της f.

ε. Το τριώνυμο $f(\chi) = -\chi^2 + 4\chi + 1, \chi \in R$,για $\chi = 2$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή.

Μον.2Χ5 =10

Θέμα 2ο

α. Να λύσετε την εξίσωση $|2\chi - 1| - 3 = 0$. **Μον.12**

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\chi) = \dfrac{\chi^2-5\chi+6}{|2\chi-1|-3}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. **Μον.6**

ii. Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της f έχει με τον άξονα $\chi'\chi$ ένα μόνο κοινό σημείο το οποίο να βρείτε. **Μον.7**

Θέμα 3^o

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(\chi) = -\chi^2 + \chi + \frac{\lambda^2+5}{\lambda+1}$, $\lambda \neq -1$

α. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες είναι $f(0) \leq 3$. **Μον.13**

β. Αν $\lambda = -2$,τότε: **i.** Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(\chi)$. **Μον.5**

ii. Να βρείτε εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $f(1), f(2)$. **Μον.7**

Θέμα 4^o

Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 - [\kappa^2 - 2\kappa + 1 + (\lambda + 1)^2]\chi - 2 = 0$ (1).

α. Δείξτε ότι για οποιαδήποτε $\kappa, \lambda \in R$ η (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. **Μον.4**

β. Αν η (1) έχει ρίζες αντίθετες να βρείτε τα κ, λ. **Μον.7**

γ. Αν $\kappa = 1, \lambda = -1$ και χ_1 η θετική ρίζα της (1),τότε:

i. Δείξτε ότι: $\sqrt[3]{2\chi_1} = \sqrt{2}$. **Μον.7**

ii. Να λύσετε την ανίσωση $2|3\chi - 1| < {\chi_1}^2 + |1 - 3\chi|$. **Μον.7**

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1°

A₁. Σχ. βιβλίο σελ.38

B₁,B₂. Σχ. βιβλίο σελ.129,132

Γ. α . Σωστό

β. Λάθος

γ. Λάθος

δ. Λάθος

ε. Σωστό

Θέμα 2°

α. $|2\chi-1|-3=0 \Leftrightarrow |2\chi-1|=3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\chi-1=-3 \Leftrightarrow \chi=-1 \\ \text{ή} \\ 2\chi-1=3 \Leftrightarrow \chi=2 \end{cases}$.

β. i. Πρέπει $|2\chi-1|\neq 3$.Με βάση το α) είναι $\chi\neq -1$ και $\chi\neq 2$.Άρα $D_f=R—\{-1,2\}$.

ii. $f(\chi)=0 \Leftrightarrow \chi^2-5\chi+6=0.\varDelta=\beta^2-4\alpha\gamma=25-24=1.\chi_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\varDelta}}{2\alpha}=\frac{5\pm1}{2}\Leftrightarrow \begin{cases}\chi_1=2\\ \chi_2=3\end{cases}$.

Η τιμή $\chi_1=2$ απορρίπτεται γιατί δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.Άρα είναι $\chi=3$,οπότε η C_f έχει με τον άξονα $\chi'\chi$ ένα μόνο κοινό σημείο το $K(3,0)$.

Θέμα 3°

α. $f(0)\leq 3 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2+5}{\lambda+1}\leq 3 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2+5}{\lambda+1}-3\leq 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2-3\lambda+2}{\lambda+1}\leq 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda^2-3\lambda+2)\leq 0.$

• $\lambda+1\geq 0 \Leftrightarrow \lambda\geq -1$. Οι ρίζες του τριωνύμου $\lambda^2-3\lambda+2$ είναι 1,2.

λ	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$\lambda+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\lambda^2-3\lambda+2$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(\lambda)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον παραπάνω πίνακα προσήμων προκύπτει ότι $\lambda\in(-\infty,-1)\cup[1,2]$.

β. Για $\lambda=-2$ το τριώνυμο γράφεται $f(\chi)=-\chi^2+\chi-9$.

i. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\varDelta=\beta^2-4\alpha\gamma=1-36=-35<0$ και επειδή $\alpha=-1<0$ είναι $f(\chi)<0$ για κάθε $\chi\in R$.

ii. Έχουμε $f(1)=-9$ και $f(2)=-11$. $S=-9+(-11)=-20$ και $P=(-9)(-11)=99$.

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι $\chi^2-S\chi+P=0\Leftrightarrow \chi^2+20\chi+99=0$.

Θέμα 4ο

Η (1) γράφεται $\chi^2-[(\kappa-1)^2+(\lambda+1)^2]\chi-2=0$.

α. $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=[(\kappa-1)^2+(\lambda+1)^2]^2+8>0$.Άρα η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β. Αφού η εξίσωση έχει ρίζες αντίθετες πρέπει $S=-\dfrac{\beta}{\alpha}=0\Leftrightarrow\beta=0\Leftrightarrow(\kappa-1)^2+(\lambda+1)^2=0\Leftrightarrow$

$\kappa-1=0\Leftrightarrow\kappa=1$ και $\lambda+1=0\Leftrightarrow\lambda=-1$.

γ. Για $\kappa=1$ και $\lambda=-1$ η εξίσωση γίνεται $\chi^2-2=0\Leftrightarrow\chi^2=2\Leftrightarrow\chi=\pm\sqrt{2}$.

Είναι $\chi_1=\sqrt{2}$.

i. $\sqrt[3]{2\chi_1}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{2^2 2}}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$ **.**

ii. $2|3\chi-1|-|1-3\chi|<{\chi_1}^2\Leftrightarrow|3\chi-1|<2\Leftrightarrow-2<3\chi-1<2\Leftrightarrow-1<3\chi<3\Leftrightarrow-\frac{1}{3}<\chi<1$.